MA 2223 ALG 3. SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

Martes 11 julio 2006

1. (6 ptos.) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Sea $Q(x, y, z, t)$ la forma cuadrática real definida por A. Escribir Q explícitmente como polinomio en x, y, z, t.

   (b) Diagonalizar Q, y dar su firma (signature).

   (c) Sea B la forma bilineal simétrica definida por A. Hallar una base de $\mathbf{R}^4$ en la cual B es diagonal.

   SOLUCION. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz $n \times n$ y $\vec{X} = (x_1, \ldots x_n)^t$, $\vec{Y}$ semejante, entonces, como se mencionó varias veces en clase, $\vec{X}^t A\vec{Y} = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_iy_j$. Luego, si A es simétrica, $\vec{X}^t A\vec{Y} = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_iy_i + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_iy_j + x_jy_i$ y, por ende, la forma cuadrática $\vec{X}^t A\vec{X} = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j$. 2). Asi, (a) $Q(x, y, z, t) = 2(xy + zt)$, escribiendo (x, y, z, t) en vez de (x_1, x_2, x_3, x_4).
   (b) Haciendo $x = U + V$, $y = U - V$, $z = P + Q$, $t = P - Q$ se obtiene la forma diagonal $U^2 - V^2 + P^2 - Q^2$, de "signature" 0. Esto es todo lo que hace falta. NO se pidió diagonalizar mediante un cambio ortogonal de coordenadas, buscando autovectores etc. . En este caso, por la sencillez de la situación, se puede hacer,(y da lo mismo) pero es mas largo.
   (c) El mismo cambio de base que diagonaliza la form cuadrática diagonaliza la forma bilineal B. El cambio de (b) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ P \\ Q \end{pmatrix}$$

   Luego, por las reglas de formación de la matriz de cambio de base, los vectores de la base buscada son las columnas de la matriz arriba mostrada.

2. (6 ptos). Sea $Q(x, y, z) = 4x^2 + 12xy - 7y^2 + 10xz - 8yz - 2z^2$.

   (a) Escribir la matriz M de Q.

   (b) Hallar una matriz P tal que P^tMP sea diagonal.

   (c) ¿Es Q positiva-definida?

   SOLUCION(a) Usando la observación de la pregunta 1, se ve que la matriz de Q es

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 6 & -7 & -4 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Esta vez, es o bien imposible o bien muy difícil hallar la diagonalización ortogonal-el polinomio característico no tiene solución fácil. Pero, completando el cuadrado

$$\begin{aligned}
4x^2+12xy-7y^2+10xz-8yz-2z^2 &= 4x^2+12xy+10xz-7y^2-8yz-2z^2 \\
&= (2x+3y+5/2z)^2-9y^2-25/4z^2-15yz-7y^2-8yz-2z^2 \\
&= (2x+3y+5/2z)^2-16y^2-23yz-33/4z^2 \\
&= (2x+3y+5/2z)^2-(4y+23/8z)^2+1/64z^2
\end{aligned}$$

Asi, haciendo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 23/8 \\ 0 & 0 & 1/64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la forma se diagonaliza a ${x'}^2-{y'}^2+{z'}^2$. La matriz P es la inversa de la matriz arriba, y la forma no es positiva-definida ya que hay un signo negativo en la forma diagonal.

3. (12 ptos)

   (a) Describir todas las matrices en form normal de Jordan que tienen polinomio característico $(x-a)^2(x-b)^2$ donde $a \neq b$. Dar el polinomio minimal en cada caso.

   (b) Hallar matrices $A, B \in M_{4\times 4}(\mathbf{C})$ tales que A no es semejante a B pero $M_A(x) = M_B(x)$ y $C_A(x) = C_B(x)$.

   SOLUCION(a) Notar que la definición de la forma normal de Jordan requiere que los bloques de Jordan se colocan en orden de tamaño decreciente de arriba izquierda hacio abajo. Dentro de este esquema, matrices que difieren solo por una permutación de bloques son semejantes, y no es necesario mencionar a ambos casos. Se queda con las posibilidades: $diag(a,a,b,b)$, $diag(J(a,2),J(b,2))$, $diag(J(a,2),b,b)$, $diag(J(b,2),a,a)$ que tienen pol. min. $(x-a)(x-b)$, $(x-a)^2(x-b)^2$, $(x-a)^2(x-b)$, $(x-b)(x-a)^2$respectivamente. (b)Sea $a \neq 0$ y sea $A = diag(J(a,2),J(a,2))$ y $B = diag(J(a,2),a,a)$. Esta tienen ambas pol. car. $(x-a)^4$ y pol. min. $(x-a)^2$. No son semejantes, porque son matrices en forma normal de Jordan y la forma es única, dentro de una clase de matrices semejantes, salvo orden de autovalores dentro de bloques del mismo tamaño.

4. (11 ptos) Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita,y sean $S, T : V \rightarrow V$ transformaciones lineales.

   (a) Explicar lo que es un subespacio de V invariante bajo T. Probar que cada autoespacio de T es invariante bajo T.

   (b) Suponer que $ST = TS$. Probar que cada autoespacio de T es invariante bajo S, y viceversa.

   (c) Suponer que T y S son diagonalizables y que $TS = ST$. Probar que S y T son *simultaneamente diagonalizables*, es decir, que existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ y $[S]_{\mathcal{B}}$ son ambas matrices diagonales.

   SOLUCION(a) W invariante bajo T significa que, $\forall \vec{w} \in W, T(\vec{w}) \in W$. Si W es un autoespacio de T, correspondiente al autovalor k, entonces si $\vec{w} \in W$, se tiene $T(\vec{w}) = k\vec{w} \in W$ y luego W es invariante bajo T.

(b) Sea W el k-autoespacio de T, y sea $\vec{w} \in W$. . Entonces $T(S(\vec{w})) = (TS)(\vec{w}) = (ST)(\vec{w}) = S(T(\vec{w})) = S(k\vec{w}) = kS(\vec{w})$. Asi $S(\vec{w})$ es también un k-autovector de T, y asi $S(\vec{w}) \in W$.
(c)Puesto que T es diagonalizable, se tiene $V = W_1 \oplus W_2 \cdots \oplus W_s$, $i = 1 \dots s$, donde los W_i son los distintos autoespacios de T. Para $i = 1 \dots s$ sea $\mathcal{B}_i$, una base de W_i, y sea $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{s} \mathcal{B}_i$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de V y $[T]_{\mathcal{B}}$ es diagonal. Mas aun, ya que los W_i son invariantes bajo S, por razones discutidas en clase $[S]_{\mathcal{B}} = diag(B_1, \dots B_s)$ sonde $B_i = [S|W_i]_{\mathcal{B}_\rangle}$. Para una elección arbitraria de las $\mathcal{B}_i$ las B_i no tienen que ser diagonales, pero, según la ayuda dada en la pizarra, $S|W_i$ es diagonalizable, ya que S es diagonalizable, y luego existe una base $\mathcal{B}_i$ de W_i, $i = 1 \dots s$, tal que B_i sea diagonal. Usando estas bases, cada B_i es diagonal y luego $[S]_{\mathcal{B}} = diag(B_1 \dots B_S)$ es diagonal, tanto como $[T]_{\mathcal{B}}$.